Vertex Operator Algebra for Finite Group Theory (Finite Simple Groups and Related Topics)

宮本, 雅彦

数理解析研究所講究録 1407 巻 2004 年 71-85

Vertex Operator Algebra for Finite Group Theory

Masahiko Miyamoto

Institute of Mathematics,
University of Tsukuba
Tsukuba, 305 Japan

1 序文

この研究の目標は、希望の自己同型群（特に単純群）を持つ頂点作用素代数を構成したり、頂点作用素代数の立場から有限群を考察することです。特に、今回は格子に話を絞り、その自己同型群を頂点作用素代数の立場から考察しようということです。例えば、リーチ格子の全自己同型群はコンウエイ群の一つ $Co.0$ ですが、これを頂点作用素代数の立場から考察すると、鏡映の類似で生成されていることが分かります。このことを中心に今回は話をしていきます。

与えられた全自己同型群を持つ代数系を構成しようとする場合、例えば、対称群 S_n（またはそれの自然な拡張）を全自己同型群として持つ格子は簡単に構成できます。例えば、S_n は A_{n-1} 型ルート系のワイル群となっていますし、また $\{x_i \mid i \in I\}$ を正規直交基底とすれば、$L = \oplus\mathbb{Z}2x_i$ の全自己同型群は $\mathbb{Z}_2^n S_n$ です。格子の場合、この群の剰余群 S_n をある格子の全自己同型群として取り出すのは簡単ではありませんが、頂点作用素代数の場合には簡単です。

V を頂点作用素代数とし、もし H が 有限自己同型群 $G = \mathrm{Aut}(V)$ の正規部分群なら、[HMT] で示されたガロア対応により、G/H は V^H 上に忠実に作用しており、一般に、V^H の全自己同型群 $\mathrm{Aut}(V^H)$ は G/H とそれほど違いません。問題は、この逆で、H が $G = \mathrm{Aut}(V)$ の正規部分群の場合、全自己同型群が H となるような頂点作用素代数 U を構成できるか？　ということです

例えば、上で S_n を全自己同型群として持つ頂点作用素代数は簡単に構成出来ると言いましたが、残念ながら, S_n は単純群ではありません。その正規部分群"交代群 A_n" が単純です. では交代群（またはそれを自然に拡張した群）が全自己同型群となるような格子や頂点作用素代数は存在するでしょうか？

有限ランクの正定値偶格子 L は有限全自己同型群 $\mathrm{Aut}(L)$ を持ちます。例えば、リーチ格子 Λ の全自己同型群 $\mathrm{Aut}(\Lambda) = Co.0$ はコンウエイ群の一つです。この格子から出発して別の自己同型群を持つような格子を構成しようとする場合、一つの方法は格子の変形です。問題はどうやって自己同型群の一部（かなりの部分）を維持するかということで

す。さもないと、前の自己同型群との関係が分かりませんし、変形して構成した格子の全自己同型群を求める上での情報も少なくなります。この観点から性質の良い自己同型があります。例えば、格子 L の中にルート v $(<v,v>=2)$ があると、それで定義される鏡映

$$\phi_v : u \to u- <v,u> v$$

は位数 2 の自己同型を定義します.
鏡映の持つ良い性質は、ある部分格子 M が v を含む限り鏡映 ϕ_v は M の自己同型となるということです。このように、一つの元とか小さな部分格子などで定義されている自己同型は性質の良いものと考えられます。
正定値偶格子における鏡映の集合は3-トランスポジションとなっています。即ち、

$$\forall \phi_v, \phi_w, \quad |\phi_v \phi_w| \,\square\, 3$$

です。対称群 S_n をワイル群として見るとき、各鏡映は互換 (i,j) と対応しています。しかし、その単純部分群である交代群 A_n は3-トランスポジション群ではありません。この群は可換な互換の積 $(i,j)(h,k)$ で生成されており、２つのそのような元の積の共役類は

$$\begin{array}{ll}
(12)(34)\cdot(12)(34)=1 & 1A\\
(12)(34)\cdot(56)(78)=(12)(34)(56)(78) & 2B\\
(12)(34)\cdot(34)(56)=(12)(56) & 2A\\
(12)(34)\cdot(25)(46)=(125)(346) & 3C\\
(12)(34)\cdot(25)(34)=(125) & 3A\\
(12)(34)\cdot(23)(56)=(1243)(56) & 4A\\
(12)(34)\cdot(23)(45)=(12453) & 5A\\
(12)(34)\cdot(25)(67)=(125)(34)(67) & 6A
\end{array}$$

となっています。特に、位数は6以下なので、6-**トランスポジション群**です.

有名は 6-トランスポジション群としては、モンスター単純群 $\mathbb{M}$ があります。ここでは $2A$ と呼ばれる位数２の元の共役類が 6-トランスポジションの性質を持っています。２つの $2A$-位数２の元の積は下の９種類の共役類のどれかに入ります。

$$1A, 2A, 2B, 3A, 3C, 4A, 4B, 5A, 6A$$

上の交代群のリストと比較して、違いは $4B$ だけです.（上の交代群の共役類に対する名前は勝手にモンスター群との関係から付けただけです。勝手と言いましたが、それなりに理由があります.)

[McKay の注目の一つ]
上の９つの共役類の数字は拡大ディンキン図形 $\hat{E}_8$ におけるアイソトロピック元（長さ０の元）を表示するとき出てくるウエイトの集合と一致しています。

最近, [Lam, 山田, 山内] が $\hat{E}_8$ と $\mathbb{M}$ の関係に対して興味ある考察を与えています。内容については彼等にお聞き下さい.

今日の主結果は A_n, $Co.0$ と $\hat{E}_8$ との間の関係を紹介することです.

2 高次元鏡映

交代群における $(i,j)(s,t)$ を真似て、可換な鏡映の積を考えてみます。

n-次元部分空間 U に対して、$\{v_1,...,v_n\}$ を U の正規直交基底とします。この時、Φ_{v_i} は互いに可換な位数 2 の線形変換です． それらの積

$$\Phi_U = \Phi_{v_1}\cdots\Phi_{v_n}$$

は容易に基底の取り方に依存しないことがわかります。即ち、U によって決まる位数 2 の線形変換です。

我々は、そのような可換鏡映の積の形の線形変換の中で、格子の自己同型となっているものを考えることにします。
L を正定値内積を持つ $\mathbb{Q}$-ベクトル空間とします。2 つの部分空間 $U,W\subseteq L$ に対して、

$$U=(U\cap W)\perp< u_1,...,u_k >$$
$$W=(U\cap W)\perp< w_1,...,w_k >$$

と分解し、$U+W=< u_1,...,u_k >\oplus(U\cap W)\oplus< w_1,...,w_k >$ 上では、

$$\Phi_U=\begin{pmatrix}-I & 0 & -2A\\ 0 & -I & 0\\ 0 & 0 & I\end{pmatrix},$$
$$\Phi_W=\begin{pmatrix}I & 0 & 0\\ 0 & -I & 0\\ -2{}^tA & 0 & -I\end{pmatrix}$$

と行列表示できます。ここで、$A=(< u_i,w_j >)$ です．それ故、積は

$$\Phi_U\Phi_W=\begin{pmatrix}-I+4{}^tAA & 0 & 2A\\ 0 & I & 0\\ -2{}^tA & 0 & -I\end{pmatrix}$$

です。ここで、積 $\Phi_U\Phi_W$ が有限位数を持つ場合だけを考えてみましょう．この場合、A は有理数成分なので、$\Phi_U\Phi_W$ は有理数行列です。一方、$\Phi_U\Phi_W$ の位数が有限ならトレイスは代数的整数なので、合わせるとトレイスが整数であることが分かります。これにより、例えば、積 $\Phi_U\Phi_W$ が素数 p の位数を持つ場合、1 の原始 p 乗根を μ とすると、$\mu,\mu^2,...,\mu^{p-1}$ は固有値として同じだけ入っていることが分かります。

用語 1 格子 $(H,<,>)$ に対して，$\sqrt{t}H$ で内積 $< a,b >_t = t < a,b >$ を持つ格子 $(H,<,>_t)$ を表します。$\sqrt{t}$ が整数 m の場合には 元を m 倍した mH と同じ（同型）です。

ルート v によって与えられる鏡映 Φ_v は $\mathbb{Q}v$ 上に -1 倍、その直交補空間 $(\mathbb{Q}v)^\perp$ 上で 1 倍として作用しています。

正則格子 H に対して、もし $\mathbb{Z}$-値格子 L が $\sqrt{2}H$ を含んでいるとすると、この時 $(\sqrt{2}H)^* = \frac{\sqrt{2}}{2}H$ なので、

$$L \subseteq (\frac{1}{2}\sqrt{2}H) \perp (\sqrt{2}H)^{\perp}$$

であり、各 $w \in L$ は

$$w = w_1 + w_2 \qquad w_1 \in \frac{1}{2}\sqrt{2}H, w_2 \in (\sqrt{2}H)^{\perp}.$$

と表示できます。それ故、

$$\Phi_{\sqrt{2}H} : w \to -w_1 + w_2$$

と定義すると、これは L の自己同型となります。これは最初に述べて高次元の鏡映の一つです. もし $H = \mathbb{Z}e$ が一次元格子 $(< e, e >= 1)$ の場合には、上の自己同型はルート $\sqrt{2}a$ によって定義される通常の鏡映です。

例を紹介しましょう. Λ をリーチ格子とします。その自己同型群 $\mathrm{Aut}(\Lambda) = Co.0$ はコンウエイ群であり、その剰余群 $Co.1 = Co.0/ < \pm 1 >$ は散在型有限単純群の一つです。コンウエイ群 $Co.0$ において、$2A$ と呼ばれる位数 2 の元の共役類に含まれている元は Λ に作用していますが、8-次元部分空間に -1 倍として作用しており、残りの 16-次元空間のベクトルを固定しています.

E_8-格子は正則格子です。後にリーチ格子が $\sqrt{2}E_8$ を沢山含むことを紹介します. それ故、上の議論によって、各部分格子 $U \cong \sqrt{2}E_8 \subseteq \Lambda$ から自己同型 $\Phi_U \in \mathrm{Aut}(\Lambda)$ が定義されます。この元の共役類はコンウエイ群 $Co.0$ の中の $2A$ になっています。

応用として、コンウエイ群の指標表から以下の結果を得ます。
(アトラスの中に 2 次元や 3 次元などの部分格子に対するいくつかの類似結果があります)

定理 2.1 リーチ格子 Λ に対して, コンウエイ群 $Co.0$ は $\sqrt{2}E_8$-部分格子の集合上に可移に作用しています.

[Proof] $\sqrt{2}E_8$-部分格子があれば位数 2 の自己同型が定義できます。一方、$Co.1$ の中には、位数 2 の共役類は、$2A, 2B, 2C$ だけで、$2B$ は $Co.0$ の位数 4 の元を制限したもの。指標表を使って計算すると、$2A$ だけが上の自己同型だということが分かります。それ故、上の $\sqrt{2}E_8$ 鏡映はすべて共役であり、定理の主張が成り立ちます。 ∎

証明とは関係ないが、上の $2A, 2B, 2C$ から誘導される $Co.0$ の元 $\pm 2A, \pm 2B, \pm 2C$ の性質を参考までに少し述べておきましょう。$-2A$ は固定空間が 16 次元で、直交している上の自己同型 2 つの直和となっています。

[Atlas] には $Co.1 = Co.0/ < \pm 1 >$ の指標表しか載っていないので、$\Lambda \times \Lambda$ に $Co.1$ が作用していることを使います。表現としては $24 \times 24 = 1 + 276 + 299$ 次元の空間の直和に分解し、それぞれの値は

$$2A: \ 1 + 20 + 43 = 60 \qquad 2B: \ 1 + 12 - 13 = 0 \qquad 2C: \ 1 + 11 - 12 = 0$$

です。これらから、$\pm 2C$ は位数 2 の元でリーチ格子上に 12 次元の固定空間を持っており、$\pm$ の区別がないことが分かります。$\pm 2B$ も $\pm$ の区別がなく、固有値 $i, -i$ をそれぞれ 12 次元ずつ持ち、$Co.0$ の中では位数 4 の元であることなどが分かります。 ∎

質問: 上の高次元鏡映（$\sqrt{2}$ リーチ格子から与えられる鏡映）で定義された自己同型が大きな自己同型群を生成するようなものを見つけてください。

2.1 E_8-空間の衝突

上の議論は一般的な次元に対して行うことができますが、ここでは8次元に話を制限しましょう。

正定値整数格子 L において、u と v をルートすると、内積は $< u, v >= 0, \pm 1$ です。この内積が $\phi_u\phi_v$ の位数を決めます。では2つの $\sqrt{2}E_8$ 部分格子の間の関係を考察して見ましょう。

問題 (1) ルートを持たない偶格子の中で起こる2つの $\sqrt{2}E_8$ 部分格子の関係をすべて分類すること.
(2) E_8-鏡映達によって生成される自己同型群がそれなりの群であるような格子を見つけること.

例えば、コンウエイ群 $Co.0$ （または $Co.1$）の指標表から次の結果を得ます。,

命題 2.2 $Co.0$ の中で、$\Phi_{\sqrt{2}E_8}$ の集合は6-トランスポジッションの性質を持っています.

3 頂点作用素代数と位数2の元

上で述べてきたことはすべて頂点作用素代数の研究から出てきたものです。それについて説明を始めましょう。そのためには、頂点作用素代数の概念が必要です。頂点作用素代数の中で、特に偶正定値整数格子から構成される格子頂点作用素代数は、難しい頂点作用素代数の中ではかなり扱い易いものの一つです。この正確な定義は最後に付録としてつけておきました。頂点作用素代数の定義は長いですが、コンパクト位相群の定義を一気に書いているようなものだと思ってください。

頂点作用素代数というのは、有限次元空間 V_n の直和 (次数空間)

$$V = \oplus_{n=0}^{\infty} V_n \qquad (\text{ウエイト分解})$$

で、各元 $v \in V$ に対して、無限個の積 $v(n) : n \in \mathbb{Z}$ が定義されており、**交換関係式**

$$[v(n), u(m)] = \sum_{i=0}^{\infty} \binom{n}{i} (v(i)u)(n+m-i)$$

を持たし、特別な元 **真空** $\mathbf{1} \in V_0$ と**ヴィラソロ元** ω を持つものです。一般に、表示を母関数で表して、$Y(v,z) = \sum v(n)z^{-n-1}$ で表し、これを v の**頂点作用素**と呼んでいます。この方が本質的な意味を持っていることがわかります。

リー代数の一種のようですが、各元に対しては下に有界 $v(r)u = 0 \quad \forall r >> 0$ という条件を付けると、頂点作用素の間に**正規積**という無限個の積

$$Y(v,z) \circ_n Y(u,z) = \mathrm{Res}_x\{(x-z)^n Y(v,x)Y(u,z) - (-z+x)^n Y(u,z)Y(v,x)\}$$

が定義できます。リー代数との違いは、**結合法則**
$Y(v(n)u,z) = Y(v,z) \circ_n Y(u,z)$ が成り立っていることです。

ここで、**真空 1** は、恒等写像 $Y(\mathbf{1},z) = 1_V$ の存在を意味し、**ヴィラソロ元** ω とその頂点作用素 $Y(\omega,z) = \sum L(n)z^{-n-2}$ とは共形変換（またはその局所変換である微分作用素達 $z^m\frac{d}{dz}$）の拡張であるヴィラソロ代数の表現

$$[L(n),L(m)] = (n-m)L(n+m) + \delta_{n,-m}\frac{n^3-n}{12}c$$

と**微分作用**

$$Y(L(-1)v,z) = \frac{d}{dz}Y(v,z)$$

と**次数作用素** $L(0) = \omega(1)$ は　$L(0)|_{V_n} = n$ を満たすことを要求します。

コンパクト位相群の定義と比較した理由は、まず上の正規積が群の演算に対応しており、ヴィラソロ元の存在がコンパクト位相群における位相に対応しています。しかも、次数の有界性や斉次空間の次元の有界性がコンパクトに対応していると考えることが出来るからです。ヴィラソロ元や有界性などの条件のない上の積（交換関係式と正規積）だけを満たすものを**頂点代数**と呼んでいます。

頂点作用素代数 V のウエイト 2 の空間 V_2 の元 e とその頂点作用素
$Y(e,z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} L^e(n)z^{-n-2}$ がヴィラソロ元の持つ性質のうち局所的な性質

$$L^e(n), L^e(m)] = (n-m)L^e(n+m) + \delta_{n,-m}\frac{n^3-n}{12}c'$$

を満たすとき、中心電荷 c' の**共形元**と呼びます。

この様な共形元が与えられると、作用 $L^e(m)$ 達によって真空から生成される V の部分空間 $\mathrm{VA}(e)$ はそれ自身, e をヴィラソロ元として持つ頂点作用素（部分）代数となっています。特に、$c = 1/2$ で $\mathrm{VA}(e)$ が単純となるとき（格子頂点作用素代数の内部なら常に単純）がこの話の主役で、この e を**中心電荷 1/2 の有理型共形元**と呼びます。この時、$\mathrm{VA}(e)$ は **2 次元イジング模型**と呼ばれる（無限次元クリフォード代数から構成される）頂点作用素代数で、$L(\frac{1}{2},0)$ で表されています。この頂点作用素代数は、既約加群として、自分自身 $L(\frac{1}{2},0)$, 最小ウエイトが 1/2 である $L(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ と, 最小ウエイトが 1/16 である $L(\frac{1}{2},1/16)$ の 3 つのみを持っています。

この頂点作用素代数の利点は、$L(\frac{1}{2},0)$ と $L(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ 上で 1, $L(\frac{1}{2},1/16)$ 上で -1 という作用はこの加群達の間の対称性となっており、しかも $L(\frac{1}{2},0)$ を含む頂点作用素代数 V の自己同型 τ_e (τ-自己同型と呼ぶ) に拡張できるということです。

例えば、ムーンシャイン頂点作用素代数 $V^\natural$ の中に $L(\frac{1}{2},0)$ が含まれており、これによって定義される自己同型が $2A$ の元になっています。

$$\begin{array}{ccc} V^\natural & & \mathbb{M} \\ e : \text{conf. vec. cc } 1/2 & \leftrightarrow & 2A\text{-inv}\tau_e \\ = \text{axis} & 1:1 & \end{array}$$

2次元イジング模型から定義された自己同型が、ある仮定の下では可換な2つの互換の積 $(i,j)(s,t)$ と類似していることを示しましょう。

3.1 中心電荷 1/2 の共形元の構成

上で説明したように、中心電荷 1/2 の有理共形元が存在すると位数2の自己同型が定義されます。では、このような共形元を見つけてこれるだろうか？中心電荷 1/2 の有理共形元の構成として次の2通りを紹介しておきましょう。(これ以外にも方法はありますが、新しい方法を見つけることも重要な問題です)

(1) 偶正定値格子 L に対して, 格子頂点作用素代数 V_L が定義されているが、 この時、$< v, v >= 4$ を満たす $v \in L$ に対して中心電荷 1/2 の有理共形元

$$e^{\pm} = \frac{1}{4}v(-1)v(-1)\mathbf{1} \pm \frac{1}{4}(e^v + e^{-v})$$

が定義できる。

自己同型 $\tau_{e^\pm}$ の性質は $\tau_{e^+} = \tau_{e^-}$ であり、$< e, f >\in 2\mathbb{Z}$ なら $(\tau_{e^\pm}\tau_{f^\pm})^2 = 1$、$< e, f >\in 2\mathbb{Z}+1$ なら、$\tau_{e^\pm}\tau_{f^\pm}$ の位数は 4 です。特に、$< \tau_{e^\pm} |< e, e >= 4 >$ は2-群となり、全自己同型群の中で正規部分群となっています。

(2) **last 共形元 ([Dong-Li-Mason-Norton])**
H を A_n, D_n, E_n 型などのルート格子とします。この時、$L = \sqrt{2}H$ の格子頂点作用素代数 $V_{\sqrt{2}H}$ において、各ルート $a \in H$ に対して、(1) で定義した中心電荷 1/2 の有理共形元

$$e^{\pm}(\sqrt{2}a) = \frac{1}{8}a(-1)^2\mathbf{1} \pm \frac{1}{4}(e^{\sqrt{2}a} + e^{-\sqrt{2}a})$$

が2つ定義できるわけですが、これらに対して、次のことが分かります。

(2-1) $\sqrt{2}H$ 型の格子から構成された頂点作用素代数の場合には、上の様にして構成した共形元によって定義される τ-自己同型はすべて自明です。
グライス代数の内部では、これらの共形元の積は

$$4e^-(\sqrt{2}a)e^-(\sqrt{2}b) = \begin{cases} 0 & \text{if } < a, b >= 0 \\ e^-(\sqrt{2}a) + e^-(\sqrt{2}b) - e^-(\sqrt{2}(a+b)) & \text{if } < a, b >= -1 \\ e^-(\sqrt{2}a) + e^-(\sqrt{2}b) - e^-(\sqrt{2}(a-b)) & \text{if } < a, b >= 1 \end{cases}$$

となっています。結論を述べると、

$$R(H) =< e^-(\sqrt{2}a) : a \in H_2 >$$

は単位元 (idempotent) $\omega^H/2 = \frac{2}{h+2}\sum_{a\in H_2^+} e^-(\sqrt{2}a)$ を持つ部分代数となっています。ここで h はコクスター数 (=ルートの数/次元) です。グライス代数全体は、 単位元

$$\omega/2 = \frac{1}{h}\sum_{a\in H_2^+}(e^+(\sqrt{2}a) + e^-(\sqrt{2}a))$$

を持っているので、

$$\tilde{\omega} = \omega - \omega^H$$

は中心電荷 $\frac{2k}{h+2}$ の共形元 (last 共形元) となります。

下に last 共形元の中心電荷の例を書いておきます。

A_1	1/2	A_2	4/5	A_3	1	A_4	8/7	A_5	5/4	A_6	4/3
A_7	7/5	A_8	16/11	E_6	6/7	E_7	7/10	E_8	1/2		

注目して欲しいのは、$H = E_8$ とすると、last 共形元 e の中心電荷が $c = \frac{2\times 8}{30+2} = \frac{1}{2}$ となることです。

定理 3.1 H^1, H^2 をそれぞれの L に含まれる $\sqrt{2}E_8$-格子とし、その *last* 共形元を $e(H^1)$, $e(H^2)$ で表すことにします。この時、

$$< e(H^1), e(H^2) >= \frac{1}{2^9}|(H_2^1 \cap H_2^2)^+| + \frac{1}{2^8} < \omega_{H^1}, \omega_{H^2} >$$

です。ここで、ω_{H^1}, ω_{H^2} は V_{H^1}, V_{H^2} におけるヴィラソロ元を表しています。

補題 3.2 $M \cong \sqrt{2}E_8$ を L の部分格子とし、V_M の *last* 共形元を e とすると、τ_e は M 上で -1 倍に作用し、$M^\perp$ 上では 1 倍となっているような L の自己同型から誘導された V_L の自己同型です.

Note: この位数 2 の自己同型がこの話の基本です.

4 モンスター単純群$\mathbb{M}$の中で

$2A$-共役類の中の 2 つの元 τ_e, τ_f の積 $\tau_e\tau_f$ の共役類は $1A, 2A, 3A, 4A, 5A, 6A, 4B, 2B, 3C$ の 9 種類であり、しかも共役類が決まれば、τ_e, τ_f を定義する共形元 e, f の内積 $< e, f >$ は一意的に決まります (by Conway)。

$$1A: \frac{256}{2^{10}},\ \ 2A: \frac{32}{2^{10}},\ \ 3A: \frac{13}{2^{10}},\ \ 4A: \frac{8}{2^{10}},\ \ 5A: \frac{6}{2^{10}},$$
$$6A: \frac{5}{2^{10}},\ \ 4B: \frac{4}{2^{10}},\ \ 3C: \frac{4}{2^{10}},\ \ 2B: \frac{0}{2^{10}}$$

事実: 任意の $2A$-位数 2 の元 τ_e, τ_f に対して、その両方の元と可換な $2B$-位数 2 の元 ϕ があることがモンスター単純群の性質から確認できます。即ち、$\tau_e, \tau_f \in C_{\mathbb{M}}(\phi)$ となるような ϕ が存在するわけです。$2B$-位数 2 の元の性質は

$$C_{\mathbb{M}}(\phi) \cong 2^{1+24}Co.1$$

ですので、剰余群 $Co.1 \cong C_{\mathbb{M}}(\phi)/2^{1+24}$ の中に τ_e, τ_f が生き残るもの、特にリーチ格子の自己同型から誘導されるものを考えることにします。

5 リーチ格子の中の $\sqrt{2}E_8$

$\mathcal{C} \subseteq \mathbb{F}_2^{24}$ を(拡大)ゴーレイコードとします。これは長さ24の自己双対コードで，　最小のウエイトは8のものです。
ウエイト8のコードワードは**オクタッド**と呼ばれていますが、良く知られている事実として、
マシュー群 $\mathrm{Aut}(\mathcal{C}) = M_{24}$ がオクタッド全体の上に可移に作用しています.

$e_1, \ldots, e_{24}$ を直交ルートとし、$\rho = \frac{\sum e_i}{4}$ と置きます。
　リーチ格子は

$$\Lambda = < e_i \pm e_j, \frac{1}{2}(\sum_{i \in C} e_i), \rho - e_i \mid C \in \mathcal{C} >$$

で与えられています。
　もし $\{e_1, \ldots, e_8\}$ がオクタッドなら, 容易にルート系 $\sqrt{2}E_8$ を次のように生成できます,

$$\begin{gathered} e_1 - e_2, e_2 - e_3, e_3 - e_4, e_4 - e_5, e_5 + e_6, \\ -e_6 + e_7, -e_7 + e_8, \tfrac{1}{2}(e_1 + \ldots + e_8) \end{gathered}.$$

　オクタッドによって定義された E_8-鏡映全体は基本アーベル群 2^{24} を生成し、その上にマシュー群 M_{24} が作用していることが分かります。その半直積 $2^{24}M_{24}$ はコンウエイ群 $Co.0$ の極大部分群になっています.
　リーチ格子に含まれる別の $\sqrt{2}E_8$ として、オクタッド以外からも次のようなものが作れます。

$\alpha_1 = e_2 - e_3$　　　(∼ denotes $+ \cdots +$)
|
$\alpha_2 = e_1 - e_2$
|
$\alpha_4 = -\frac{3}{4}e_1 + \frac{1}{4}(e_2 \sim e_{24})$ —— $\alpha_3 = -\frac{1}{2}(e_{19} \sim e_{24})$
|
$\alpha_5 = -\frac{1}{2}(e_9 \sim e_{16})$
|
$\alpha_6 = \frac{1}{4}(e_1 \sim e_3) - \frac{3}{4}e_4 - \frac{1}{4}(e_5 \sim e_8) + \frac{1}{4}(e_9 \sim e_{16}) + \frac{1}{4}(e_{17} \sim e_{20}) - \frac{1}{4}(e_{21} \sim e_{24})$
|
$\alpha_7 = -\frac{1}{2}(e_{17} \sim e_{20}) + \frac{1}{2}(e_{21} \sim e_{24})$
|
$\alpha_8 = \frac{1}{4}(e_1 \sim e_3) + \frac{3e_4}{4} - \frac{1}{4}(e_5 \sim e_8) + \frac{1}{4}(e_9 \sim e_{11}) - \frac{1}{4}(e_{12} \sim e_{16}) + \frac{1}{4}(e_{17} \sim e_{20}) - \frac{1}{4}(e_{21} \sim e_{24})$

これで、E_8-鏡映全体で生成される群がマシュー群よりも大きくなり、コンウエイ群になることが分かります。

6 E_8-鏡映と互換の積 $(i,j)(s,t)$ との関係

$\{e_1, \ldots, e_8\}$ を直交基底とし、$H = \mathbb{Q}e_1 + \cdots + \mathbb{Q}e_8$ と置きます。S_8 は $\{e_1, \ldots, e_8\}$ に作用しており、$e_i - e_j$ はルートです. $\Phi_{e_i - e_j}$ が互換 (i,j) に対応していることは容易に確認でき

ます。

E_8 で E_8 型格子を表し、テンソル積 $\mathbb{Q}E_8 \otimes_{\mathbb{Q}} H$ を考えます。この中からルートを含まない格子を見つけていきます。H の中のルート a に対して、$E_8 \otimes a \cong \sqrt{2}E_8$ であることに注目してください。

(5A) 位数 5 の積の場合
交代群の中では $(1,2)(3,4)\cdot(2,3)(4,5) = (1,2,4,5,3)$ です。

拡大 E_8 ディンキン図形 $\hat{E}_8$ における $5A$ node に注目します。その頂点を除いた図形は $\hat{E}_8 - 5A\text{node} = A_4 \perp A_4$ と分解しています。
ラティスとして、$a \in \mathbb{Q}A_4, b \in \mathbb{Q}A_4$ があって、$E_8 =< A_4 + A_4, a+b >$ です。ここで、
$M =< A_4 \otimes (e_1 - e_2) + A_4 \otimes (e_3 - e_4), a \otimes (e_1 - e_2) + b \otimes (e_3 - e_4) > \cong \sqrt{2}E_8$
$N =< A_4 \otimes (e_2 - e_3) + A_4 \otimes (e_2 - e_3), a \otimes (e_4 - e_5) + b \otimes (e_4 - e_5) > \cong \sqrt{2}E_8$
と定義すると、$N + M$ はルートを持たず、Λ のある部分格子と同型であることが確認できます。$\Phi_M\Phi_N$ は位数 5 となり、このタイプの自己同型の積は $Co.0$ と $\mathbb{M}$ の中に出てくることが分かります。

(3C) 位数 3 の積
交代群の中では $(1,2)(3,4)\cdot(1,5)(3,6) = (1,5,2)(3,6,4)$ です。
$\hat{E}_8 - 3C\text{node} = A_8$ であり、$a \in \mathbb{Q}A_8$ があって、$E_8 =< A_8, a >$ となります。この時、
$M =< A_8 \otimes (e_1 - e_2), a \otimes (e_1 - e_2) > \cong \sqrt{2}E_8$
$N =< A_8 \otimes (e_2 - e_3), a \otimes (e_2 - e_3) > \cong \sqrt{2}E_8$
と定義すると、$N + M$ はルートを持たず Λ のある部分格子と同型です。$\Phi_M\Phi_N$ は位数 3 で、このタイプの自己同型の積は $Co.0$ と $\mathbb{M}$ の中に出てきます.

注釈 1 $3C$ タイプであるような積は通常のワイル群での位数 3 の積と同じだと思って良いことが分かります。なぜなら、$a \in H$ をルートとすると、$E_8 \otimes a \cong \sqrt{2}E_8$ であり、$E_8 \otimes a$ による $E_8 \otimes H$ における E_8-鏡映は実際には、 H における a の鏡映 (に E_8 をテンソルしたもの) と同じです。その意味で、通常のワイル群は E_8-鏡映によっても実現出来ることが分かります。

(3A) 位数 3 の別の積
交代群の中では $(1,2)(3,4)\cdot(1,2)(4,5) = (3,4,5)$ です。
$\hat{E}_8 - 3A\text{node} = A_2 + E_6$ と分解しており、$a \in \mathbb{Q}A_2$, $b \in \mathbb{Q}E_6$ があって、$E_8 =< A_2 + E_6, a+b >$ となります。この時、
$M =< E_6 \otimes (e_3 - e_4) + A_2 \otimes (e_1 - e_2), a \otimes (e_3 - e_4) + b \otimes (e_1 - e_2) > \cong \sqrt{2}E_8$
$N =< E_6 \otimes (e_4 - e_5) + A_2 \otimes (e_1 - e_2), a \otimes (e_4 - e_5) + b \otimes (e_1 - e_2) > \cong \sqrt{2}E_8$
と置くと、$N + M$ はルートを含まず、Λ の部分格子と同型です.
$\Phi_M\Phi_N$ は位数 3 で、このタイプの自己同型の積は $Co.0$ と $\mathbb{M}$ の中に出てきています.

(2B) 位数 2 の積
交代群の中では $(1,2)(3,4)\cdot(5,6)(7,8) = (1,2)(3,4)(5,6)(7,8)$ であり、直交している互換

の積となっています。
ラティスの構造は、$\hat{E}_8 - 2B\mathrm{node} = D_8$ より、$a \in \mathbb{Q}D_8$ があって、$E_8 =< D_8, a >$ となっています。ここで交代群の中では直交している事実より、
$M =< D_8(e_1 - e_2), a(e_1 - e_2) >\cong \sqrt{2}E_8$
$N =< D_8(e_5 - e_6), a(e_5 - e_6) >\cong \sqrt{2}E_8$
と定義すると、$M \perp N$ であり、$\Phi_M\Phi_N$ は位数 2 です. 容易に、$M + N$ はルートを含まず、Λ の中に含まれることがわかります。

残念ながら、以下の 3 つに関しては、構成とディンキン図形との間にそれほど強い関連が見つかっていません。

(2A) 位数 2 の積
交代群の中では、$(1,2)(3,4) \cdot (3,4)(5,6) = (1,2)(5,6)$ であり、$(3,4)$ を共通に持っています。
ディンキン図形では $\hat{E}_8 - 2A\mathrm{node} = A_1 + E_7$ と分解し、
$a \in \mathbb{Q}A_1, b \in QE_7$ があって、格子として $E_8 =< D_4 + D_4, a + b >$ となります。この時、交代群の様に共通部分を使って
$M =< D_4 \otimes (e_1 - e_2) + D_4 \otimes (e_3 - e_4), a \otimes (e_1 - e_2) + b \otimes (e_3 - e_4) >\cong \sqrt{2}E_8$
$N =< D_4 \otimes (e_5 - e_6) + D_4 \otimes (e_3 - e_4), a \otimes (e_5 - e_6) + b \otimes (e_3 - e_4) >\cong \sqrt{2}E_8$
と定義すると、$M + N$ はルートを含まず、Λ の中に現れます。
$\Phi_M\Phi_N$ は位数 2 で、Φ-不変です.

(4A) 位数 4 の積
交代群の中では $(1,2)(3,4) \cdot (2,3)(5,6) = (1,2,4,3)(5,6)$ です。
ディンキン図形は $\hat{E}_8 - 4A\mathrm{node} = A_3 + D_5$ と分解し、
$a \in \mathbb{Q}A_3, b \in \mathbb{Q}E_5$ があって、格子として $E_8 =< A_3 + D_5, a + b >$ となっています。この時、
$M =< A_3 \otimes (e_1 - e_2) + D_5 \otimes (e_3 - e_4), a \otimes (e_1 - e_2) + b \otimes (e_3 - e_4) >\cong \sqrt{2}E_8$
$N =< A_3 \otimes p + D_5 \otimes p, a \otimes p + b \otimes p >\cong \sqrt{2}E_8$
定義します。ここで $p = \frac{e_2 - e_3 + e_5 - e_6}{\sqrt{2}}$ です。
この時、$M + N$ はルートを持たず、Λ の部分格子と同型であることがわかります。
$\Phi_M\Phi_N$ は位数 4 を持っています.

(6A) 位数 6 の積
交代群の中では $(1,2)(3,4) \cdot (2,5)(6,7) = (1,2,5)(3,4)(6,7)$ であり、
ディンキン図形は $\hat{E}_8 - 6A\mathrm{node} = A_5 \perp A_2 \perp A_1$ と分解します。
それ故、$a \in \mathbb{Q}A_5, b \in \mathbb{Q}A_2, c \in \mathbb{Q}A_1$ があって、格子は $E_8 =< A_5 + A_2 + A_1, a + b + c) >$ です。ここで、
$M =< A_5 \otimes (e_1 - e_2) + A_2 \otimes (e_8 - e_9) + A_1 \otimes (e_3 - e_4),$
$a \otimes (e_1 - e_2) + b \otimes (e_8 - e_9) + c \otimes (e_3 - e_4) >$
$N =< A_5 \otimes (e_2 - e_5) + A_2 \otimes (e_8 - e_9) + A_1 \otimes (e_6 - e_7),$
$a \otimes (e_2 - e_5) + b \otimes (e_8 - e_9) + c \otimes (e_6 - e_7) >$
と定義すると、$N + M$ はルートを含まず、Λ の中に現れます.
$\Phi_M\Phi_N$ は位数 6 であり、このタイプの積は $Co.0$ と $\mathbb{M}$ の中に出てきます.

注釈 2 最後に、これらの事実は
(1) ムーンシャイン頂点作用素代数、リーチ格子頂点作用素代数と E_8-格子の頂点作用素代数が類似したフレイム構造を持つことと、
(2) フレイムの自己同型が本質的に $L_4(2)$ であり、これが対称群 A_8 と同型であるという事実（コンウエイの *three lectures* の最初）
の２つから来ていることです。この説明は後日にさせて頂きます。

7 付録

7.1 格子頂点作用素代数の構成

$(L, <,>)$ を偶格子とし、$\hat{L} = \{\pm e^a \mid a \in L\}$ を L の中心拡大

$$1 \to <\pm> \to \hat{L} \to L \to 1$$

で $e^a e^b = (-1)^{<a,b>} e^b e^a$ を満たすものとします。L を複素ベクトル空間 $\mathcal{H} = \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{Z}} L$ に埋め込み、内積 $<,>$ を $\mathcal{H}$ に拡張します。 ここで、$\mathcal{H}$ を可換リー代数だと見て、対応するアフィンリー代数

$$\hat{\mathcal{H}} = \mathcal{H} \otimes \mathbb{C}[t, t^{-1}] \oplus \mathbb{C}c$$
$$[x \otimes t^m, y \otimes t^n] = <x, y> m\delta_{m+n,0}c$$

を定義します。次に、

$$\hat{\mathcal{H}}_{\mathbb{Z}}^{+} = \mathcal{H} \otimes t\mathbb{C}[t]$$
$$\hat{\mathcal{H}}_{\mathbb{Z}}^{-} = \mathcal{H} \otimes t^{-1}\mathbb{C}[t^{-1}]$$

とおき、部分代数

$$\hat{\mathcal{H}}_{\mathbb{Z}} = \hat{\mathcal{H}}_{\mathbb{Z}}^{+} \oplus \hat{\mathcal{H}}_{\mathbb{Z}}^{-}$$

を考えます。この代数は**ハイゼンベルグ代数**と呼ばれています。

誘導 $\hat{\mathcal{H}}$-加群で $\hat{\mathcal{H}}_{\mathbb{Z}}$ の上でも既約であるような加群

$$K(1) = U(\hat{\mathcal{H}}) \otimes_{U(\mathcal{H} \otimes \mathbb{C}[t] \oplus \mathbb{C}c)} \mathbb{C} \sim S(\hat{\mathcal{H}}^{-}) \quad linearly$$

を考えます。ここで $\mathcal{H} \otimes \mathbb{C}[t]$ は $\mathbb{C}$ に自明に作用し、c は $\mathbb{C}$ に 1 として作用していると考えます。また、$U(.)$ は普遍包絡環、$S(.)$ は対称代数を表しています。

次に誘導 $\hat{L}$-加群

$$\mathbb{C}\{L\} = \mathbb{C}[\hat{L}] \otimes_{\mathbb{C}[w_p]} \mathbb{C} \sim \mathbb{C}[L] \quad linearly$$

を構成します。ここで、 $\mathbb{C}[L]$ は群環を表しており、w_p は $\mathbb{C}$ に w_p 倍として作用していると考えます。

用語 2 $a \in \hat{L}$ に対して、 $\tau(a)$ で $\mathbb{C}\{L\}$ の中の像を表すことにします。

以下 z で形式的変数を表し、$\hat{L}, \mathcal{H}, z^h$ の $\mathbb{C}\{L\}$ への作用を次のように定義します。

$$\begin{array}{ll} a\cdot\tau(b)=\tau(ab) & w_p\cdot\tau(b)=w_p\tau(b) \\ h\cdot\tau(a)=<h,\bar{a}>\tau(a) & \\ z^h\cdot\tau(a)=z^{<h,\bar{a}>}\tau(a) & \end{array}$$

ラティス L に関する**フォック空間**を次で定義します。

$$V_L=K(1)\otimes_{\mathbb{C}}\mathbb{C}\{L\}\sim S(\hat{\mathcal{H}}^-)\otimes\mathbb{C}\{L\}$$

ラティス型の頂点作用素代数 (V_L, Y) の $V_L=\Pi V_i$ の母関数 $\sum \dim V_i q^i$（指標と呼ばれます）は L のテーター関数 $\sum_{n\in\mathbb{Q}}|L_{2n}|q^n$ と $\Pi_{n=1}^{\infty}(1+q^n+q^{2n}+q^{3n}+\ldots)^d$ の積で表すことが出来ます。ここで、d は L の次元です。

7.2 格子頂点作用素代数における頂点作用素

$v\in V_L$ に対して、頂点作用素 $Y(v,z)$ の定義を始めましょう。

$\alpha\in\mathcal{H}, n\in\mathbb{Z}$ に対して、$\alpha(n)$ で作用素 $\alpha\otimes t^n$ を表す事にし、

$$\alpha(z)=\sum_{n\in\mathbb{Z}}\alpha(n)z^{-n-1}$$

と置きます。

定義 7.1 (正規順序) $\alpha(n)\ n<0$ または、$a\in\hat{L}$ の形のものがあれば　すべての $\alpha(n)\ n>0$, z^α の左側に持ってくることにします。

この定義が物理で最初に出てきた正規順序の形で、後に正規積へと発展しました。この場合には、負のものどうしは可換なので正規積 $\circ_{-1}$ と一致しています。

次を定義します。

$$E^+(\alpha,z)=exp(\sum_{n\in\mathbb{Z}_+}\frac{\alpha(n)}{n}z^{-n})\in End\ S(\hat{\mathcal{H}}_{\mathbb{Z}}^-)[[z^{-1}]]$$

$$E^-(\alpha,z)=exp(\sum_{n\in\mathbb{Z}_+}\frac{\alpha(-n)}{-n}z^{-n})\in End\ S(\hat{\mathcal{H}}_{\mathbb{Z}}^-)[[z]]$$

展開すると各 z^r の係数は有限和です。

$$\left\{\begin{array}{ll} \frac{d}{dz}E^+(\alpha,z) & =(\sum_{n\in\mathbb{Z}_+}-\alpha(n)z^{-n-1})E^+(\alpha,z) \\ \frac{d}{dz}E^-(\alpha,z) & =(\sum_{n\in\mathbb{Z}_+}-\alpha(-n)z^{-n-1})E^-(\alpha,z) \end{array}\right\}$$

補題 7.2 $\alpha\in\mathcal{H}$ に対して、$E^\pm(\alpha,z)$ は定義可能で、次が成り立っています。

$$\begin{array}{l} E^\pm(0,z)=1 \\ E^\pm(\alpha+\beta,z)=E^\pm(\alpha,z)E^\pm(\beta,z) \\ [d,E^\pm(\alpha,z)]=-DE^\pm(\alpha,z)=(\sum_{n\in\pm\mathbb{Z}_+}\alpha(n)z^{-n})E^\pm(\alpha,z) \\ [h(m),E^+(\alpha,z)]=0 \quad\quad if\ m\in N \\ [h(m),E^-(\alpha,z)]=0 \quad\quad if\ m\in -N \\ [h(m),E^+(\alpha,z)]=-<h,\alpha>z^mE^+(\alpha,z) \quad if\ m\in-\mathbb{Z}_+ \\ [h(m),E^+(\alpha,z)]=-<h,\alpha>z^mE^-(\alpha,z) \quad if\ m\in\mathbb{Z}_+ \end{array}$$

定義 7.3 $\alpha \in \mathcal{H}$ に対する頂点作用素を

$$Y(\alpha, z) = E^-(-\alpha, z)E^+(-\alpha, z)e^\alpha z^\alpha$$

と置きます。

注釈 3 e^α の項は

$$[h(0), Y(\alpha, z)] = < h, \alpha > Y(\alpha, z)$$

を得るためのものです。

$$h \in \mathcal{H} \text{ に対して } \begin{array}{ll} h(0): & \mathbb{C}[\mathcal{H}] \to \mathbb{C}[\mathcal{H}] \\ & e^\alpha \to < h, \alpha > e^\alpha \end{array}$$

と定義し、特別な z^h 　$z^h \cdot e^\alpha = z^{<h,\alpha>}e^\alpha$ も定義しておきます。この時、$z^\alpha e^\beta = e^\beta z^{\alpha + <\alpha,\beta>}$ が成り立っています。

次数の条件を満足するために $\deg e^\alpha = -\frac{1}{2} < \alpha, \alpha >$ と置くとつじつまが合ってくれます。

定義 7.4 (一般の頂点作用素の定義)

$$v = a_k(-n_k) \cdots a_1(-n_1) \otimes \tau(a)$$

に対して、

$$Y(v, z) =: \frac{1}{(n_k - 1)!}(\frac{d}{dz})^{n_k - 1} a_k(z) \cdots \frac{1}{(n_1 - 1)!}(\frac{d}{dz})^{n_1 - 1} a_1(z) Y(a, z):$$

として定義し、線形に拡張します。

注釈 4 一見　複雑な形の頂点作用素を定義しているように見えますが、先に（次数を下げる）消滅作用素を働かせ、その後で（次数を上げる）生成作用素を使っている点に注目してください。それ為に、例えば、多くの場合、ウエイト 2 の空間の考察だけで十分なので、消滅作用素のうち次数 3 以下のものは無視出来ますし、生成作用素も次数 3 以上のものを無視できるわけです。

この定義で、線形写像

$$\begin{array}{llll} Y(, z): & V_L & \to & (End\ V_L)\{z\} \\ & v & \to & Y(v, z) = \sum_{c \in \mathbb{Z}} v_n z^{-n-1} \end{array}$$

が定義可能です。この $Y(v, z)$ を v に関する**頂点作用素**と呼びます。

7.3 格子頂点作用素代数のヴィラソロ元

$\mathcal{H}$ の正規直交基底 $\{\beta_1, ..., \beta_d\}$ を取ってきて

$$\omega = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{d} \beta_i(-1)^2 \in V(0)$$

と置くと、この元がヴィラソロ元です。

7.4 応用例

この頂点作用素代数の応用例を一つ紹介しておきましょう。Λ を格子とすると、Λ で -1 倍は自己同型で、Λ の自己同型群 G は -1 を中心に含んでいます。例えば、Λ がリーチ格子の場合には、$Aut(\Lambda)$ はコンウエイ群 $Co.0$ で $Co.1 = Co.0/<\pm 1>$ は単純群です。この群を 格子の立場から研究しようとすると、$Co.1$ は $\Lambda \otimes \Lambda$ または、$\mathbb{F}_2$ 上の内積空間 $\Lambda/2\Lambda$ に作用しています。一方、Λ 上の自己同型はすべて V_Λ 上への自己同型に誘導でき、-1 から誘導されたものを θ とおくと、固定点の空間 $(V_L)^\theta$ はかなり大きく、ほぼ半分で、この頂点作用素代数の上に、$Co.1$ が作用しています。

References

[At] J. H. Conway, R T. Curtis, S. P. Norton, R. A. Parker and R. A. Wilson, ATLAS of Finite Groups, Oxford Univ. Press, 1985.

[Bo] R. E. Borcherds, Vertex algebra, Kac-Moody algebra, and the Monster, *Proc. Natl. Acad. Sci. USA* **83** (1986), 3068-3071.

[Co] J. H. Conway, A simple construction for the Fischer-Griess monster group, *Invent. Math.* **79** (1985), 513-540.

[CS] J. H. Conway and N. J. A. Sloane, *Sphere Packings, Lattices and Groups*, Springer-Verlag, New-York, (1988).

[DLMN] C. Dong, H. Li, G. Mason, S. Norton, Associative subalgebras of the Griess algebra and related topics. The Monster and Lie algebras, 27-42, Ohio State Univ. Math. Res. Inst. Publ., **7** (1998).

[FLM] I. Frenkel, J. Lepowsky and A. Meurman, Vertex Operator Algebras and the Monster, *Pure and Appl. Math.* **Vol. 134**, Academic Press, Boston, 1988.

[HMT] A. Hanaki, M. Miyamoto, and D. Tanbara, Quantum Galois thoery for finite groups, *Duke Math. J.* **97**, (1999) 541-544

[M] M. Miyamoto, Griess algebras and conformal vectors in vertex operator algebras, *J. Algebra* **179**, (1996) 523-548